第 2 节 椭圆的焦点三角形相关问题（★★★）

强化训练

1.（★）已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右焦点，P 是椭圆 C 上一点，若 $|PF_1|=2$，且 $PF_1\perp PF_2$，则 $a=$_____.

答案： $\dfrac{3}{2}$

解析： 如图，涉及椭圆上的点与两个焦点，想到椭圆定义，

由椭圆定义，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

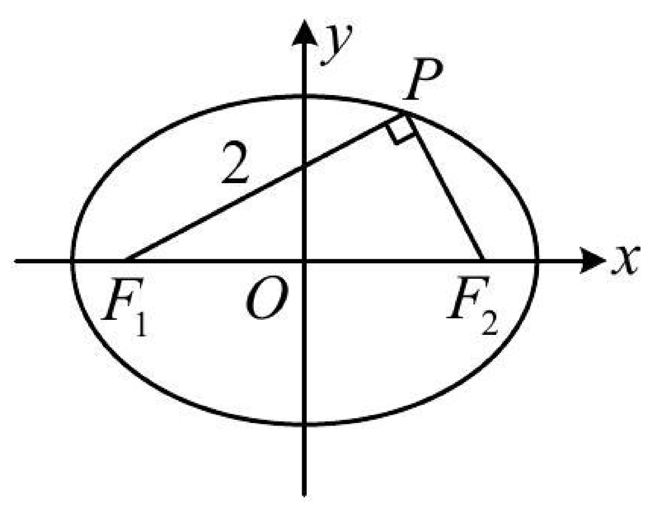
又 $|PF_1|=2$，所以 $|PF_2|=2a-|PF_1|=2a-2$，

再来翻译 $PF_1\perp PF_2$，用勾股定理即可建立关于 a 的方程，

由题意，$c=\sqrt{a^2-1}$，所以 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{a^2-1}$，

因为 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

即 $4+(2a-2)^2=4(a^2-1)$，解得：$a=\dfrac{3}{2}$.



2.（2022 •内蒙古包头模拟 •★★）已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 是椭圆 E 的两个焦点，P 是 E 上一点，若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，且 $S_{\Delta PF_1F_2}=c^2$，则椭圆 E 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

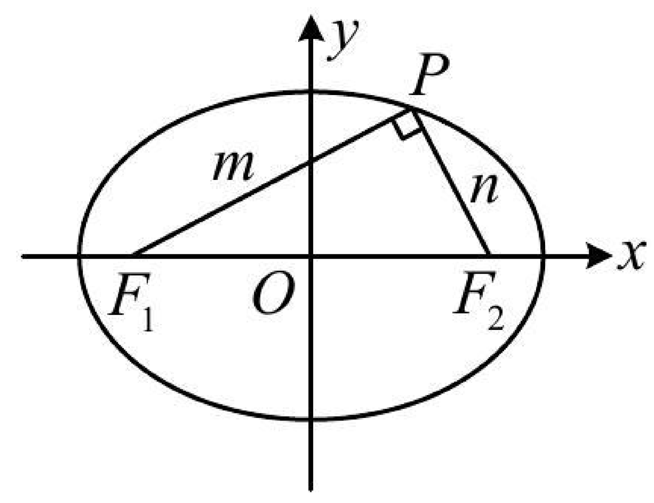
答案： C

解析： $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0\Rightarrow PF_1\perp PF_2$，如图，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}mn=c^2$，所以 $mn=2c^2$ ①；

ΔPF_1F_2 是焦点三角形，考虑用椭圆定义，并用勾股定理翻译 $PF_1\perp PF_2$，

又 $\begin{cases}m+n=2a & ②\\ m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2 & ③\end{cases}$，由③可得 $(m+n)^2-2mn=4c^2$，

结合①②得 $4a^2-4c^2=4c^2\Rightarrow a^2=2c^2\Rightarrow e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



3．（2023•全国模拟•★★）设F_1，F_2分别为椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的左、右焦点，点$P$在椭圆上，若线段$PF_1$的中点$M$在$y$轴上，则$\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}$的值为（　　）

（A）$\dfrac{5}{13}$　（B）$\dfrac{4}{5}$　（C）$\dfrac{2}{7}$　（D）$\dfrac{4}{9}$

答案：C

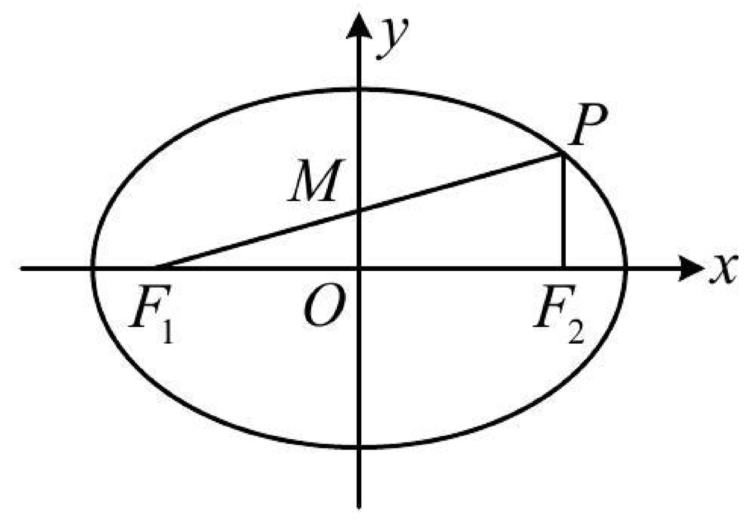
解析：条件涉及中点，先看看有没有中位线，

如图，PF_1的中点M在y轴上，O为F_1F_2的中点，

所以$OM// PF_2$，因为$OM\perp x$轴，所以$PF_2\perp x$轴，

我们发现$|PF_2|$是半通径长，可代公式计算，$|PF_1|$可由椭圆定义来算，

$|PF_2|=\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{4}{3}$，又$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，所以$|PF_1|=6-|PF_2|=\dfrac{14}{3}$，故$\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}=\dfrac{2}{7}$.



4．（2022•江西模拟•★★★）设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$M$，$N$在$C$上，且$M$，$N$关于原点$O$对称，若$|MN|=|F_1F_2|$，$|NF_2|=3|MF_2|$，则椭圆$C$的离心率为_____.

答案：$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

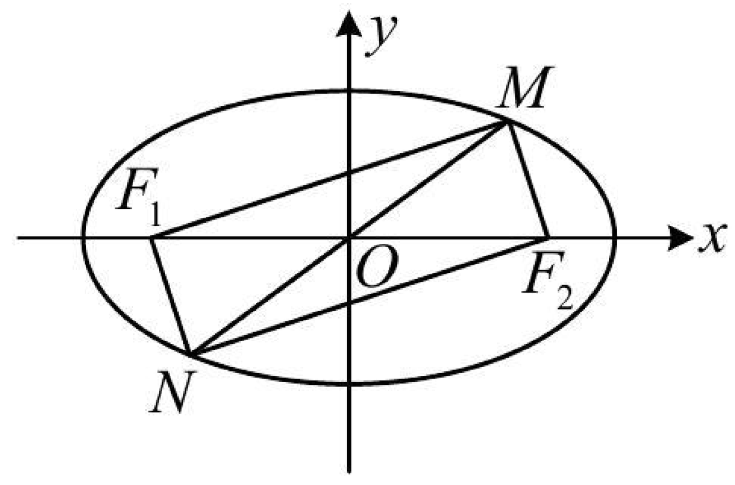
解析：先由已知条件分析四边形MF_1NF_2的形状，如图，因为M，N关于原点对称，且$|MN|=|F_1F_2|$，

所以四边形MF_1NF_2是矩形，故$MF_1\perp MF_2$，且$|MF_1|=|NF_2|$，

要求离心率，可把条件转换到ΔMF_1F_2中来，结合椭圆定义处理，

又$|NF_2|=3|MF_2|$，所以$|MF_1|=3|MF_2|$，可设$|MF_2|=m$，则$|MF_1|=3m$，

所以$|F_1F_2|=\sqrt{|MF_2|^2+|MF_1|^2}=\sqrt{10}m$，故椭圆$C$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{|F_1F_2|}{|MF_1|+|MF_2|}=\dfrac{\sqrt{10}m}{m+3m}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



5．（2022 • 福建质检 • ★★★）已知点 F_1，F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 A，B 两点，且 $AF_1\perp AB$，$\dfrac{|AF_1|}{|AB|}=\dfrac{4}{3}$，则该椭圆的离心率是（　　）

（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

答案：B

解析：如图，ΔAF_1F_2 和 ΔBF_1F_2 都是焦点三角形，可结合椭圆定义处理，先由已知条件设一下边长，

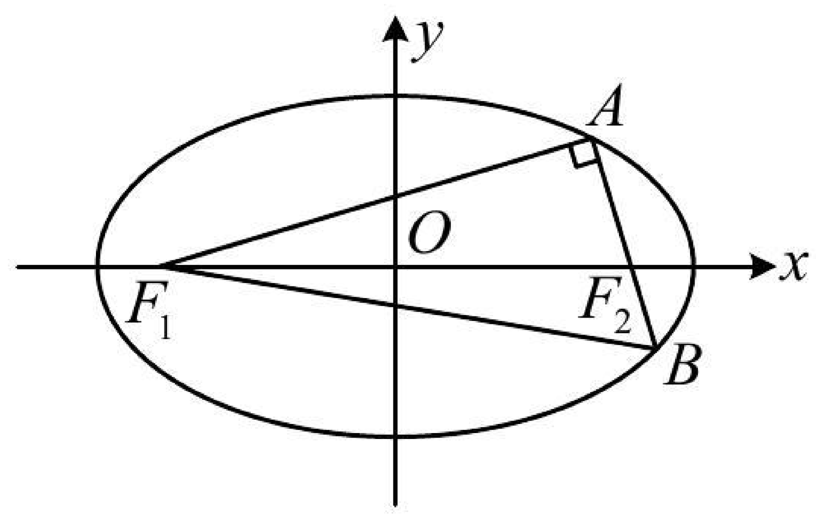
因为 $\dfrac{|AF_1|}{|AB|}=\dfrac{4}{3}$，所以可设 $|AF_1|=4m$，$|AB|=3m$，

因为 $AF_1\perp AB$，所以 $|BF_1|=\sqrt{|AF_1|^2+|AB|^2}=5m$，故 ΔABF_1 的周长 $L=|AF_1|+|BF_1|+|AB|=12m$，

又 $L=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a$，所以 $12m=4a$，从而 $m=\dfrac{a}{3}$，故 $|AF_1|=\dfrac{4a}{3}$，$|AF_2|=2a-|AF_1|=\dfrac{2a}{3}$，

要求离心率，可到 ΔAF_1F_2 中用勾股定理来建立方程，

在 ΔAF_1F_2 中，$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，所以 $\dfrac{16a^2}{9}+\dfrac{4a^2}{9}=4c^2$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.



6.（2023 •山西模拟 •★★）已知 F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上一点，若 $|PF_1|=|F_1F_2|$，$\cos\angle PF_2F_1=\dfrac{1}{4}$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

答案：B

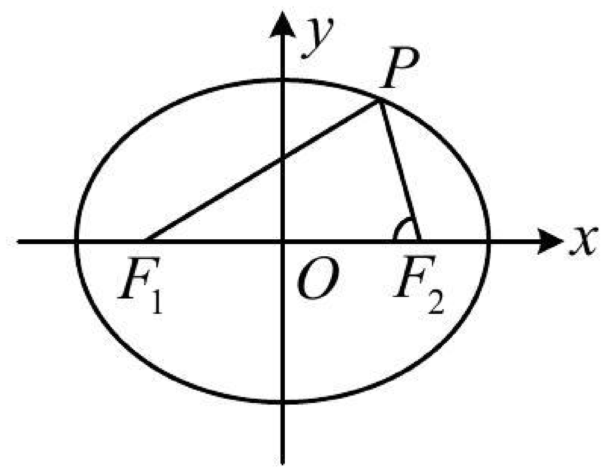
解析：如图，已知 $\cos\angle PF_2F_1$，只要把 ΔPF_1F_2 的三边用 a，b，c 表示，就能用余弦定理建立方程求离心率，

由题意，$|PF_1|=|F_1F_2|=2c$，又 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，所以 $|PF_2|=2a-|PF_1|=2a-2c$，

在 ΔPF_1F_2 中，$|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_2|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle PF_2F_1$，

所以 $4c^2=(2a-2c)^2+4c^2-2(2a-2c)\cdot 2c\cdot\dfrac{1}{4}$，

结合 $a>c$ 整理得：$2a-3c=0$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.



7.（2022•广西南宁模拟•★★★）已知 F 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，过原点的直线 l 与椭圆 E 相交于 P，Q 两点，若 $|PF|=5|QF|$，且 $\angle PFQ=120^\circ$，则椭圆的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{7}}{6}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{21}}{6}$　（D）$\frac{\sqrt{21}}{5}$

答案：C

解析：看到过原点的直线与椭圆交于 P，Q 两点，想到与焦点构成平行四边形，

如图，设右焦点为 F'，则四边形 $PFQF'$ 为平行四边形，

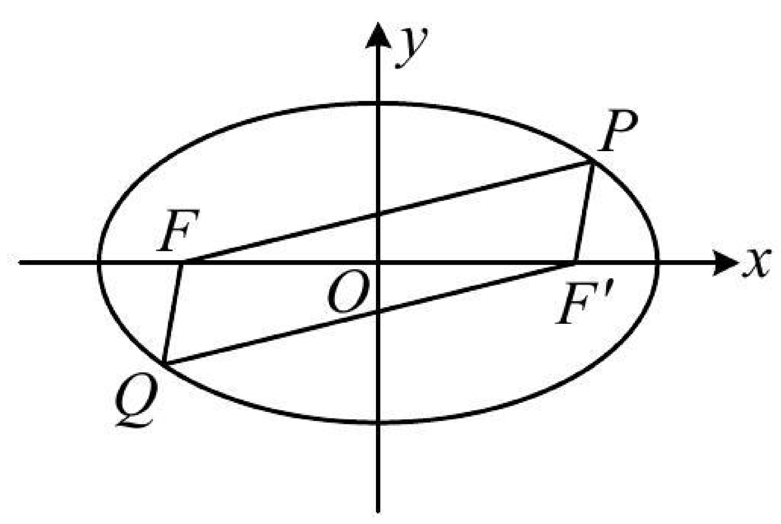
为了运用椭圆的定义，将条件转移到 $\Delta PFF'$ 中来，$|PF'|=|QF|$，又 $|PF|=5|QF|$，所以 $|PF|=5|PF'|$ ①，

由椭圆定义，$|PF|+|PF'|=2a$，结合①可得 $|PF|=\frac{5a}{3}$，$|PF'|=\frac{a}{3}$，

还剩 $\angle PFQ=120^\circ$ 这个条件没用，可据此求出 $\angle FPF'$，在 $\Delta PFF'$ 中由余弦定理建立方程求离心率，

$\angle FPF'=180^\circ-\angle PFQ=60^\circ$，$|FF'|=2c$，由余弦定理，$|FF'|^2=|PF|^2+|PF'|^2-2|PF|\cdot|PF'|\cdot\cos\angle FPF'$，

所以 $4c^2=\frac{25a^2}{9}+\frac{a^2}{9}-2\times\frac{5a}{3}\times\frac{a}{3}\times\cos 60^\circ$，整理得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{12}$，故离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{6}$.



8.（2014•安徽卷•★★★）若 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:x^2+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A，B 两点，若 $|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的方程为_____.

答案：$x^2+\frac{3y^2}{2}=1$

解析：如图，条件中有 $|AF_1|=3|F_1B|$，可用它构造相似三角形，通过相似比求点 B 的坐标，

由题意，长半轴长 $a=1$，作 $BM\perp x$ 轴于点 M，则 $\Delta BMF_1 \backsim \Delta AF_2F_1$，所以 $\frac{|MF_1|}{|F_1F_2|}=\frac{|BM|}{|AF_2|}=\frac{|BF_1|}{|AF_1|}=\frac{1}{3}$ ①，

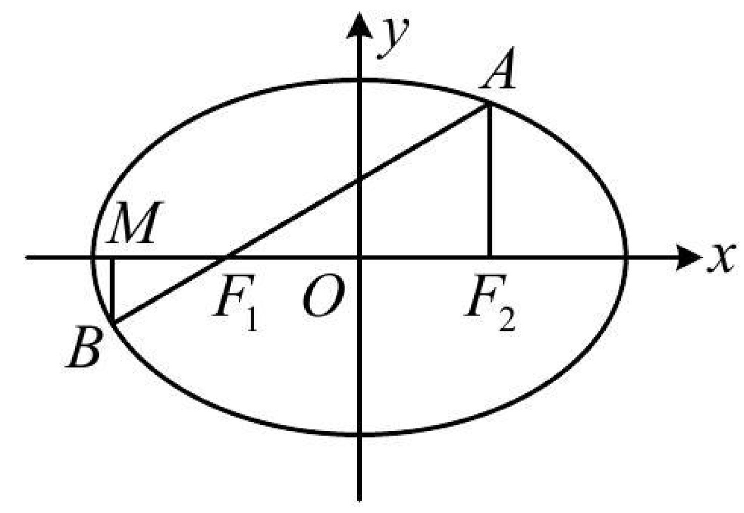
所以 $|MF_1|=\frac{1}{3}|F_1F_2|=\frac{2c}{3}$，$|OM|=|MF_1|+|OF_1|=\frac{5c}{3}$，故 $x_B=-\frac{5c}{3}$，

再通过求$|BM|$算y_B，由①知$|BM|=\frac{1}{3}|AF_2|$，可联立直线AF_2和椭圆的方程来求A的纵坐标，得到$|AF_2|$，

联立$\begin{cases}x=c\\x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$解得：$y=\pm b\sqrt{1-c^2}$，所以$y_A=b\sqrt{1-c^2}$，又$a=1$，所以$1-c^2=a^2-c^2=b^2$，故$y_A=b^2$，

所以$|AF_2|=b^2$，结合①可得$|BM|=\frac{b^2}{3}$，故$B(-\frac{5c}{3},-\frac{b^2}{3})$，

代入椭圆方程得：$\frac{25c^2}{9}+\frac{b^2}{9}=1$，结合$b^2+c^2=1$解得：$b^2=\frac{2}{3}$，所以椭圆$E$的方程为$x^2+\frac{3y^2}{2}=1$.



9.（2022·湖南长沙模拟·★★★）已知F_1，F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点$A(0,b)$，点$B$在椭圆$C$上，且$\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，$D$，$E$分别是$AF_2$，$BF_2$的中点，且$\Delta DEF_2$的周长为4，则椭圆$C$的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　（B）$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{8}=1$　（C）$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$　（D）$x^2+\frac{3y^2}{2}=1$

答案：B

解析：由$\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$可求得点$B$的坐标，代入椭圆建立一个方程；

如图，作$BG\perp x$轴于点G，则$\Delta AOF_1\backsim\Delta BGF_1$，所以$\frac{|BG|}{|OA|}=\frac{|GF_1|}{|OF_1|}=\frac{|BF_1|}{|AF_1|}=\frac{1}{2}$，

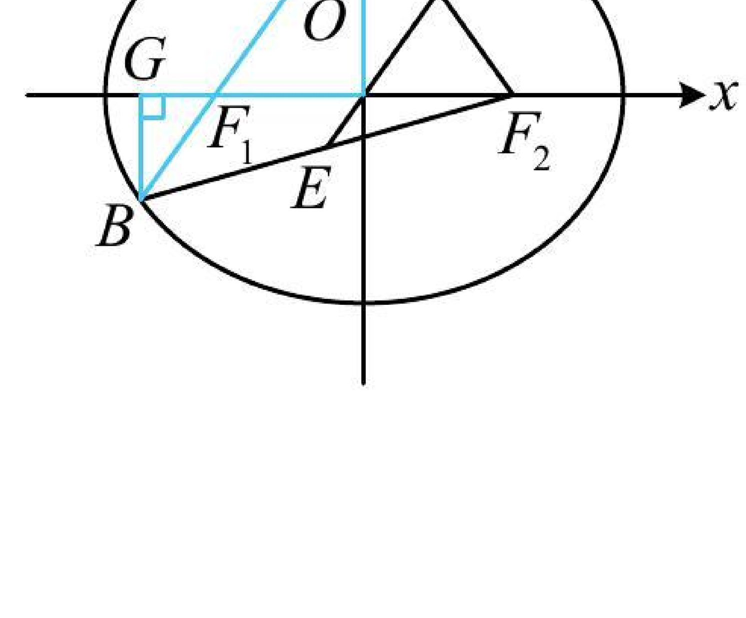
故$|BG|=\frac{1}{2}|OA|=\frac{b}{2}$，$|GF_1|=\frac{1}{2}|OF_1|=\frac{c}{2}$，所以$B(-\frac{3c}{2},-\frac{b}{2})$，代入椭圆方程整理得：$a^2=3c^2$ ①，

再来看ΔDEF_2的周长，可利用中点转化成ΔABF_2的周长，结合定义计算，

因为D，E分别是AF_2，BF_2的中点，所以$|AB|=2|DE|$，$|AF_2|=2|DF_2|$，$|BF_2|=2|EF_2|$，

故$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=2(|DE|+|DF_2|+|EF_2|)=8$，又由椭圆定义，$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a$，

所以$4a=8$，故$a=2$，代入①可求得$c^2=\frac{4}{3}$，所以$b^2=a^2-c^2=\frac{8}{3}$，故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{8}=1$.



10.（2022•江西萍乡三模•★★★）设 F_1，F_2 是椭圆 $C:y^2+\frac{x^2}{t}=1(0<t<1)$ 的焦点，若椭圆 C 上存在点 P，满足 $\angle F_1PF_2=120^\circ$，则 t 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{4}]$　　（B）$[\frac{1}{4},1)$　　（C）$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　（D）$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

答案：A

解法 1：先把 $\angle F_1PF_2=120^\circ$ 的情形画出来，如图 1，在焦点三角形中，首先考虑椭圆定义，

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，由题意，椭圆的长半轴长 $a=1$，半焦距 $c=\sqrt{1-t}$，所以 $m+n=2a=2$ ①，

还有角度的条件，可在 ΔPF_1F_2 中用余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4(1-t)=m^2+n^2-2mn\cos 120^\circ$，故 $4(1-t)=m^2+n^2+mn$ ②，

要求 t 的范围，应建立关于 t 的不等式，结合式①知可对式②配方，用不等式 $mn\le(\frac{m+n}{2})^2$ 来实现，

所以 $4(1-t)=(m+n)^2-mn\ge(m+n)^2-(\frac{m+n}{2})^2=\frac{3(m+n)^2}{4}$，将式①代入可得 $4(1-t)\ge 3$，故 $t\le\frac{1}{4}$，

当且仅当 $m=n=1$ 时取等号，又 $0<t<1$，所以 $t\in(0,\frac{1}{4}]$.

解法 2：也可直接用最大张角结论，当 P 在椭圆上运动时，$\angle F_1PF_2$ 的最大值在短轴端点处取得，

要使椭圆上存在点 P，满足 $\angle F_1PF_2=120^\circ$，只需图 2 所示的 $\angle F_1PF_2\ge 120^\circ$ 即可，即图中 $\alpha\ge 60^\circ$，

所以 $\cos\alpha=\frac{|OP|}{|PF_1|}=\frac{\sqrt{t}}{1}\le\frac{1}{2}$，结合 $0<t<1$ 可解得：$0<t\le\frac{1}{4}$.

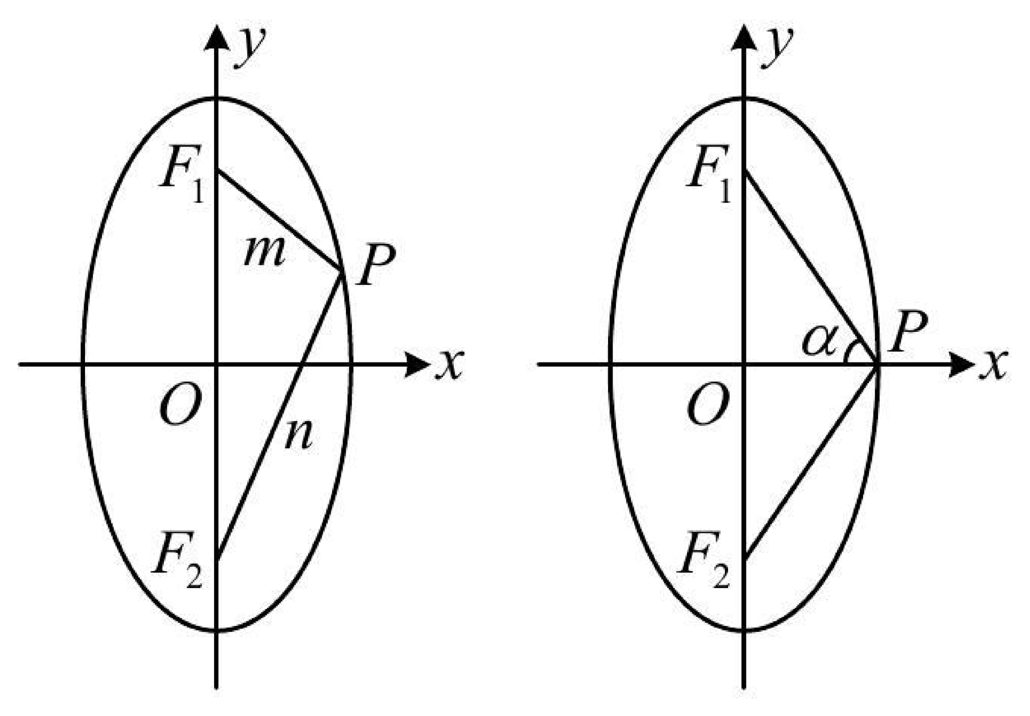


图1　　图2

11.（2022•山东模拟•★★★）已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在椭圆上且在 x 轴的下方，若线段 PF_2 的中点 T 在以 F_1F_2 为直径的圆上，则直线 PF_2 的倾斜角为（　　）

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{2\pi}{3}$

答案：C

解析：由题意，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，所以半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，$|F_1F_2|=2c=2$，

如图，因为 PF_2 的中点 T 在以 F_1F_2 为直径的圆上，所以 $TF_1\perp TF_2$，

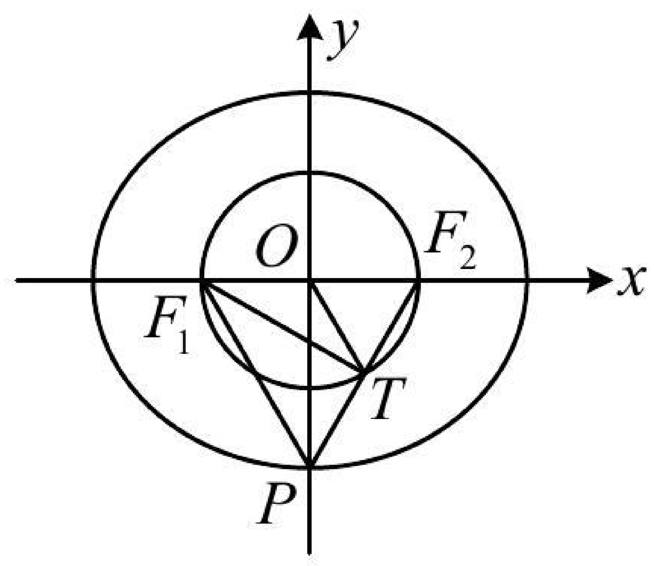
直线 PF_2 的倾斜角与 $\angle F_1F_2T$ 相等，由于 $|F_1F_2|$ 已知，故只要求出 $|F_1T|$ 或 $|F_2T|$，就能求得 $\angle F_1F_2T$ 的一个三

角函数值，进而求出该角，涉及中点，不妨看看有没有中位线，

因为 O 是 F_1F_2 的中点，T 是 PF_2 的中点，所以 $|PF_1| = 2|OT| = 2$，

又 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$，所以 $|PF_2| = 4 - |PF_1| = 2$，从而 $|F_2T| = \frac{1}{2}|PF_2| = 1$，故 $\cos\angle F_1F_2T = \frac{|F_2T|}{|F_1F_2|} = \frac{1}{2}$，

所以 $\angle F_1F_2T = \frac{\pi}{3}$，故直线 PF_2 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$.



【反思】 本题点 P 的位置比较特殊，按上述解法求出 $|PF_1| = 2$ 后，也可由椭圆定义求得 $|PF_2| = 2$，从而发现 ΔPF_1F_2 是正三角形，也能得出 $\angle F_1F_2T = \frac{\pi}{3}$.